نام درس: سیگنالها و سیستم - استاد اخایی
محمد امانلو

تکلیف شماره ۴

۸۱۰۱۰۰۰۸۴

۱ سوال اول

۱.۱ a

$$X(j\omega) = 3\delta(\omega-1) + j2\delta(\omega-2) + 3\delta(\omega+1) - j2\delta(\omega+2)$$

تابع زمان متناظر را با تبدیل فوریه‌ی معکوس به‌دست می‌آوریم:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

با استفاده از خاصیت سیفت دلتا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

پس:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \big[3\delta(\omega-1) + j2\delta(\omega-2) + 3\delta(\omega+1) - j2\delta(\omega+2)\big] e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(3e^{jt} + j2e^{j2t} + 3e^{-jt} - j2e^{-j2t}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(3(e^{jt} + e^{-jt}) + j2(e^{j2t} - e^{-j2t})\Big)
\end{aligned}$$

حال با استفاده از روابط اویلر:

$$e^{jt} + e^{-jt} = 2\cos t, \qquad e^{j2t} - e^{-j2t} = 2j\sin(2t)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\Big(3\cdot 2\cos t + j2\cdot 2j\sin(2t)\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\big(6\cos t - 4\sin(2t)\big)
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\left(6\cos t - 4\sin(2t)\right)}$$

۲.۱ b

$$X(j\omega) = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{j\omega + 2}\, e^{-j\omega 2}$$

ابتدا $\sin(\omega/2)$ را به صورت نمایی می‌نویسیم:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)$$

پس:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{j\omega + 2}\, e^{-j2\omega} \cdot \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{1}{j\omega + 2}\left(e^{j\omega/2}e^{-j2\omega} - e^{-j\omega/2}e^{-j2\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j}\frac{1}{j\omega + 2}\left(e^{-j\frac{3}{2}\omega} - e^{-j\frac{5}{2}\omega}\right). \end{aligned}$$

می‌دانیم که

$$\frac{1}{j\omega + 2} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-2t}u(t) \triangleq x_0(t)$$

و خاصیت شیفت زمانی:

$$e^{-j\omega t_0}X_0(j\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x_0(t - t_0).$$

در نتیجه:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2j}\Big(e^{-j\frac{3}{2}\omega}X_0(j\omega) - e^{-j\frac{5}{2}\omega}X_0(j\omega)\Big)$$

و تبدیل معکوس فوریه برابر است با:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2j}\Big(x_0\big(t - \tfrac{3}{2}\big) - x_0\big(t - \tfrac{5}{2}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2j}\Big(e^{-2\left(t-\frac{3}{2}\right)}u\big(t - \tfrac{3}{2}\big) - e^{-2\left(t-\frac{5}{2}\right)}u\big(t - \tfrac{5}{2}\big)\Big). \end{aligned}$$

پس جواب نهایی:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2j}\left[e^{-2\left(t-\frac{3}{2}\right)}u\big(t - \tfrac{3}{2}\big) - e^{-2\left(t-\frac{5}{2}\right)}u\big(t - \tfrac{5}{2}\big)\right]}$$

۳.۱ c

برای یافتن تبدیل فوریه‌ی معکوس تابع

$$X(j\omega) = \frac{3(3 + j\omega)}{(4 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

ابتدا کسر را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم. می‌خواهیم ضرایب A و B را طوری پیدا کنیم که

$$\frac{3(3+j\omega)}{(4+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4}.$$

طرف راست را هم‌مقام می‌کنیم:

$$\frac{A}{j\omega+2} + \frac{B}{j\omega+4} = \frac{A(j\omega+4)+B(j\omega+2)}{(j\omega+2)(j\omega+4)}.$$

بنابراین باید داشته باشیم

$$A(j\omega+4)+B(j\omega+2) = 3(j\omega+3).$$

با هم‌مقایسه‌کردن ضرایب $j\omega$ و جمله‌ی ثابت:

$$\begin{cases} A+B=3, \\ 4A+2B=9. \end{cases}$$

حل این دستگاه:

$$A=\frac{3}{2}, \qquad B=\frac{3}{2}.$$

پس

$$X(j\omega) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{j\omega+2}+\frac{1}{j\omega+4}\right).$$

اکنون از زوج تبدیل شناخته‌شده استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a+j\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-at}u(t), \qquad a>0.$$

در نتیجه

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\} = e^{-2t}u(t), \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega+4}\right\} = e^{-4t}u(t).$$

پس تبدیل فوریه‌ی معکوس $X(j\omega)$ برابر است با

$$x(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t}u(t)+e^{-4t}u(t)\right) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right)u(t).$$

$$\boxed{x(t) = \frac{3}{2}\left(e^{-2t}+e^{-4t}\right)u(t)}$$

۴.۱ d

برای تابع

$$X(j\omega) = \frac{-(j\omega)^2 - 4j\omega - 6}{\left[(j\omega)^2 + 3j\omega + 2\right](j\omega + 4)}$$

متغیر $s = j\omega$ را قرار می‌دهیم:

$$X(s) = \frac{-(s^2 + 4s + 6)}{(s^2 + 3s + 2)(s + 4)} = \frac{-(s^2 + 4s + 6)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)}.$$

حال کسر را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{-(s^2 + 4s + 6)}{(s + 1)(s + 2)(s + 4)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 4}.$$

بنابراین

$$-(s^2 + 4s + 6) = A(s + 2)(s + 4) + B(s + 1)(s + 4) + C(s + 1)(s + 2).$$

با هم‌مقایسه کردن ضرایب توان‌های مختلف s به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} A + B + C = -1, \\ 6A + 5B + 3C = -4, \\ 8A + 4B + 2C = -6. \end{cases}$$

حل دستگاه:

$$A = -1, \qquad B = 1, \qquad C = -1.$$

در نتیجه

$$X(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} - \frac{1}{s + 4},$$

یا با جای‌گذاری $s = j\omega$:

$$X(j\omega) = -\frac{1}{j\omega + 1} + \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}.$$

با استفاده از زوج تبدیل شناخته‌شده

$$\frac{1}{a + j\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-at}u(t), \qquad a > 0,$$

داریم:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + 1}\right\} = e^{-t}u(t), \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + 2}\right\} = e^{-2t}u(t), \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + 4}\right\} = e^{-4t}u(t).$$

پس تبدیل فوریه‌ی معکوس $X(j\omega)$ برابر است با

$$x(t) = -e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t) = \left(-e^{-t} + e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t).$$

$$\boxed{x(t) = \left(-e^{-t} + e^{-2t} - e^{-4t}\right)u(t)}$$

۵.۱ e

برای تابع

$$X(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega + 2)^2}$$

متغیر $s = j\omega$ را قرار می‌دهیم:

$$X(s) = \frac{2s + 1}{(s + 2)^2}.$$

حال آن را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{2s + 1}{(s + 2)^2} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2}.$$

طرف راست را هم‌مقام می‌کنیم:

$$2s + 1 = A(s + 2) + B = As + 2A + B.$$

بنابراین با هم‌مقایسه کردن ضرایب:

$$\begin{cases} A = 2, \\ 2A + B = 1 \;\Rightarrow\; 4 + B = 1 \;\Rightarrow\; B = -3. \end{cases}$$

پس

$$X(s) = \frac{2}{s + 2} - \frac{3}{(s + 2)^2}$$

و در حوزه‌ی فرکانس:

$$X(j\omega) = \frac{2}{j\omega + 2} - \frac{3}{(j\omega + 2)^2}.$$

اکنون از زوج‌های تبدیل فوریه‌ی شناخته‌شده استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a + j\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-at}u(t), \qquad \frac{1}{(a + j\omega)^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} te^{-at}u(t), \qquad a > 0.$$

بنابراین:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega + 2}\right\} = 2e^{-2t}u(t), \qquad \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3}{(j\omega + 2)^2}\right\} = 3te^{-2t}u(t).$$

در نتیجه تبدیل فوریه‌ی معکوس $X(j\omega)$ برابر است با:

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) - 3te^{-2t}u(t) = (2-3t)e^{-2t}u(t).$$

$$\boxed{x(t) = (2-3t)e^{-2t}\,u(t)}$$

۶.۱ f

برای تابع

$$X(j\omega) = \frac{4\sin^2(\omega)}{\omega^2}$$

می‌نویسیم:

$$X(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2.$$

از زوج تبدیل فوریه‌ی معروف

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

استفاده می‌کنیم. پس داریم

$$X(j\omega) = \big(\mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t/2)\}\big)^2 = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t/2) * \mathrm{rect}(t/2)\}.$$

بنابراین

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right).$$

هم‌پیچش دو پالس مستطیلی با طول 2 یک تابع مثلثی با پایه‌ی 4 و ارتفاع 2 است، لذا

$$x(t) = \begin{cases} 2-|t|, & |t|<2, \\ 0, & |t|\geq 2, \end{cases}$$

که می‌توان آن را به صورت

$$x(t) = 2\,\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$$

نوشت، که در آن $\Lambda(\cdot)$ تابع مثلثی (triangle) استاندارد است.

$$\boxed{x(t) = 2\,\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)}$$

۷.۱ g

$$X(j\omega) = \frac{d}{d\omega}\left[4\cos(3\omega)\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}\right].$$

بگذارید

$$A(\omega) = 4\cos(3\omega)\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}, \qquad X(j\omega) = \frac{dA(\omega)}{d\omega}.$$

خاصیت مشتق در حوزه‌ی فرکانس (با تبدیل فوریه $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$) می‌گوید:

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} -jt\,x(t).$$

پس اگر $A(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} a(t)$ باشد، آن‌گاه

$$X(j\omega) = \frac{dA(\omega)}{d\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) = -jt\,a(t).$$

اکنون $a(t)$ را پیدا می‌کنیم. ابتدا $A(\omega)$ را به صورت نمایی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 4\cos(3\omega)\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega} \\ &= 4\cdot\frac{e^{j3\omega}+e^{-j3\omega}}{2}\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega} \\ &= 2e^{j3\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\omega} + 2e^{-j3\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

از زوج تبدیل معروف

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega}$$

نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\sin(2\omega)}{\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right).$$

بنابراین

$$2\,\frac{\sin(2\omega)}{\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right).$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی $e^{\pm j\omega t_0}X(j\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t\pm t_0)$ داریم:

$$A(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} a(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{4}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right).$$

در نتیجه

$$x(t) = -jt\,a(t) = -jt\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{4}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right)\right].$$

پس جواب نهایی:

$$\boxed{x(t) = -jt\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t+3}{4}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right)\right]}$$

(که در آن $\mathrm{rect}(u) = 1$ برای $|u| < \frac{1}{2}$ و صفر در غیر این صورت است.)

۲ سوال دوم

۱.۲ a

برای سیگنال

$$x(t) = \left[\frac{2\sin(\pi t)}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}\right]$$

ابتدا دو عامل را جدا می‌کنیم:

$$x_1(t) = \frac{2\sin(\pi t)}{\pi t}, \qquad x_2(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}, \qquad x(t) = x_1(t)x_2(t).$$

زوج تبدیل فوریه‌ی معروف (با متغیر فرکانسی ω):

$$\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} rect\Big(\frac{\omega}{2W}\Big) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

را داریم؛ لذا

$$X_1(j\omega) = 2\,rect\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big) = \begin{cases} 2, & |\omega| < \pi, \\ 0, & otherwise, \end{cases}$$

$$X_2(j\omega) = rect\Big(\frac{\omega}{4\pi}\Big) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

چون $x(t) = x_1(t)x_2(t)$، در حوزه‌ی فرکانس داریم

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2\pi}\big(X_1 * X_2\big)(\omega).$$

کانولوشن دو پالس مستطیلی با عرض‌های 2π و 4π (و دامنه‌های ۲ و ۱) یک شکل ذوزنقه‌ای می‌دهد. طول ناحیه‌ی هم‌پوشانی دو مستطیل برابر است با

$$L(\omega) = \begin{cases} 2\pi, & |\omega| \le \pi, \\ 3\pi - |\omega|, & \pi < |\omega| < 3\pi, \\ 0, & |\omega| \ge 3\pi. \end{cases}$$

پس

$$(X_1 * X_2)(\omega) = 2\,L(\omega)$$

و بنابراین

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(X_1 * X_2)(\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \le \pi, \\ 3 - \dfrac{|\omega|}{\pi}, & \pi < |\omega| < 3\pi, \\ 0, & |\omega| \ge 3\pi. \end{cases}$$

یعنی تبدیل فوریه‌ی سیگنال داده‌شده یک ذوزنقه‌ی متقارن با ارتفاع ۲ و تکیه‌گاه $[-3\pi, 3\pi]$ است.

۲.۲ b

$$e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+j\omega}$$

با استفاده از خاصیت دوگانگی: اگر $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(j\omega)$ آنگاه $X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega)$.
در اینجا $X(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$ و $x(t) = e^{-t}u(t)$، پس

$$\frac{1}{1+jt} = X(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi x(-\omega) = 2\pi e^{\omega}u(-\omega).$$

بنابراین

$$\boxed{X(j\omega) = 2\pi e^{\omega}u(-\omega)}.$$

۳.۲ c

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}\, d\tau$$

ابتدا

$$g(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \qquad \Rightarrow \qquad G(j\omega) = \mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)\,,$$

و داریم

$$x(t) = (u * g)(t) \qquad (u(t) : \text{پله‌ی واحد}).$$

تبدیل فوریه‌ی پله‌ی واحد:

$$u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

پس

$$X(j\omega) = U(j\omega)\, G(j\omega) = \Big(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\Big)\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)\,.$$

چون $\mathrm{rect}(\omega/2\pi) = 1$ در $\omega = 0$:

$$\boxed{X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\pi}\Big)}$$

یا به‌صورت قطعه‌ای:

$$X(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{j\omega}, & |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| > \pi, \end{cases} \qquad \text{به‌همراه ترم } \pi\delta(\omega).$$

۴.۲ d

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right) * \left(\frac{\sin(2t)}{\pi t}\right)\right]$$

بگذارید

$$g(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

(چون به‌طور کلی $\frac{\sin(Wt)}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}(\omega/2W)$).

پس

$$w(t) = (g * g)(t) \quad \Rightarrow \quad W(j\omega) = G^2(j\omega) = \left[\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right)\right]^2 = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

اکنون از خاصیت مشتق:

$$\frac{d}{dt}w(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega W(j\omega).$$

بنابراین

$$X(j\omega) = j\omega\ \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right),$$

یعنی

$$\boxed{X(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < 2, \\ 0, & |\omega| \geq 2. \end{cases}}$$

۳ سوال سوم

در این سؤال تبدیل فوریه‌ی سیگنال پایهدر این سؤال تبدیل فوریه‌ی سیگنال پایه

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

داده شده است. تابع پایه را به صورت $\mathrm{rect}(t/2)$ در نظر می‌گیریم.

(a)

شکل (a) سه پالس پیاپی است:
- روی بازه‌ی $0 \leq t \leq 2$: دامنه 1 - روی بازه‌ی $2 \leq t \leq 4$: دامنه 2 - روی بازه‌ی $4 \leq t \leq 5$: دامنه -1
پس می‌توان نوشت

$$y_a(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2\ \mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(t - \tfrac{9}{2}\right),$$

که در آن $\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) = 1$ برای $|t - t_0| \leq T/2$.

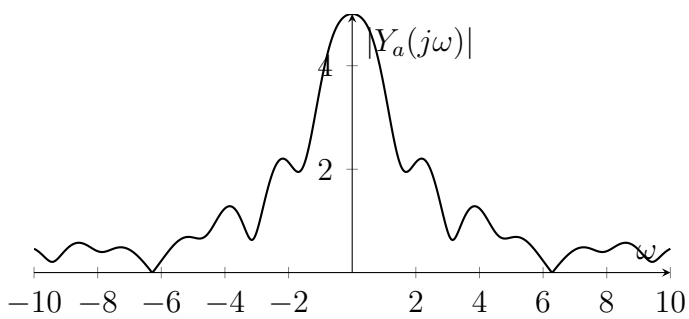
تبدیل فوریه‌ی پالس با طول T و مرکز t_0 برابر است با

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\right\} = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\, e^{-j\omega t_0}.$$

در اینجا برای دو پالس اول $T=2$ و برای پالس سوم $T=1$ است، لذا

$$\boxed{Y_a(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}\left(e^{-j\omega} + 2e^{-j3\omega}\right) - \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega} e^{-j\frac{9}{2}\omega}}$$

شکل دامنه‌ی فرکانسی $|Y_a(j\omega)|$:



(b)

شکل (b) سیگنالی است که فقط در بازه‌ی $[-1,1]$ غیرصفر بوده و روی این بازه خطی است:

$$y_b(t) = \begin{cases} 2t-3, & |t| \le 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

این را می‌توان به صورت

$$y_b(t) = (2t-3)\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

نوشت؛ یعنی

$$y_b(t) = 2t\, x(t) - 3x(t), \qquad x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right).$$

با استفاده از خاصیت

$$t\, x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega},$$

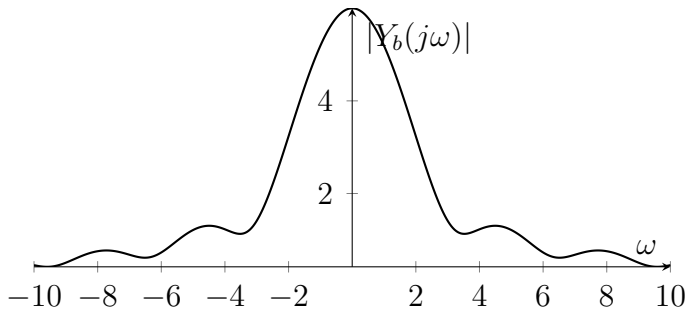
و این که $X(j\omega) = \dfrac{2\sin\omega}{\omega}$، داریم

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = 2\,\frac{\omega\cos\omega - \sin\omega}{\omega^2}.$$

پس

$$Y_b(j\omega) = 2j\,\frac{dX(j\omega)}{d\omega} - 3X(j\omega) = \boxed{Y_b(j\omega) = \frac{4j\big(\omega\cos\omega - \sin\omega\big)}{\omega^2} - \frac{6\sin\omega}{\omega}}$$

و دامنه‌ی فرکانسی $|Y_b(j\omega)|$ به صورت زیر رسم می‌شود:



(c)

شکل (c) یک تابع مثلثی متقارن است:

$$y_c(t) = \begin{cases} 2\left(1 - \dfrac{|t|}{2}\right), & |t| \le 2, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

این تابع را می‌توان به صورت کانولوشن دو پالس نوشت:

$$y_c(t) = x(t) * x(t), \qquad x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right).$$

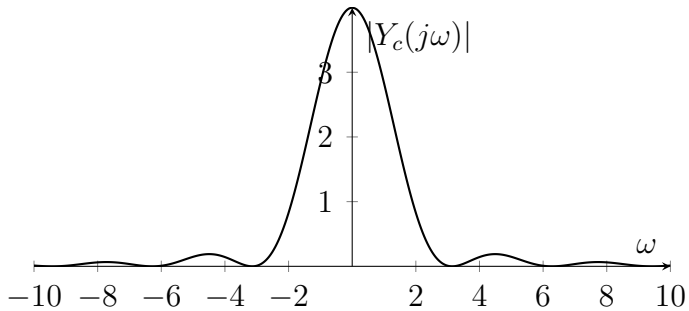
بنابراین در حوزه‌ی فرکانس

$$Y_c(j\omega) = X(j\omega)\,X(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2.$$

پس

$$\boxed{Y_c(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right)^2}$$

و چون این تابع حقیقی و زوج است، دامنه‌ی فرکانسی برابر همین تابع است. شکل $|Y_c(j\omega)|$ (شکل sinc^2 با لوب اصلی بزرگ و لوب‌های جانبی کوچک‌تر) به صورت زیر است:



۴ سوال چهارم

برای هر دستگاه LTI، با گرفتن تبدیل فوریه از معادله‌ی دیفرانسیل (و فرض شرایط اولیه‌ی صفر) داریم

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = j\omega Y(j\omega), \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\} = (j\omega)^2 Y(j\omega),$$

و پاسخ فرکانسی برابر است با

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$

(a) $$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

با گرفتن تبدیل فوریه:

$$j\omega Y(j\omega) + 3Y(j\omega) = X(j\omega) \quad \Rightarrow \quad (j\omega + 3)Y(j\omega) = X(j\omega).$$

بنابراین پاسخ فرکانسی

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + 3}}$$

برای به‌دست آوردن پاسخ ضربه، از زوج تبدیل فوریه‌ی معروف استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{a + j\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-at}u(t), \qquad a > 0.$$

در این‌جا $a = 3$، پس

$$\boxed{h(t) = e^{-3t}u(t)}$$

(b) $$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -\frac{d}{dt}x(t)$$

تبدیل فوریه‌ی دو طرف معادله:

$$(j\omega)^2 Y(j\omega) + 5(j\omega)Y(j\omega) + 6Y(j\omega) = -j\omega X(j\omega).$$

بنابراین

$$\big[(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6\big]Y(j\omega) = -j\omega X(j\omega),$$

و پاسخ فرکانسی

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{-j\omega}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}.$$

برای ساده‌سازی، می‌گذاریم $s = j\omega$ (مد مشابه لاپلاس):

$$H(s) = \frac{-s}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-s}{(s+2)(s+3)}.$$

حال کسر را به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{-s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}.$$

پس

$$A(s+3) + B(s+2) = -s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A + B = -1, \\ 3A + 2B = 0. \end{cases}$$

حل دستگاه:

$$B = -3, \qquad A = 2.$$

در نتیجه

$$H(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{3}{s+3},$$

و با بازگشت به متغیر فرکانسی

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{2}{j\omega+2} - \frac{3}{j\omega+3}}$$

برای پاسخ ضربه از همان زوج تبدیل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{s+a} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{-at}u(t).$$

پس

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t),$$

یعنی

$$\boxed{h(t) = \big(2e^{-2t} - 3e^{-3t}\big)u(t)}$$

که پاسخ ضربه‌ی سیستم قسمت (b) است.

۵ سوال پنجم

برای یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

اگر

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n},$$

آنگاه با جای‌گذاری $s \to \frac{d}{dt}$ معادله‌ی دیفرانسیل به صورت

$$a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \cdots + a_n y^{(n)}(t) = b_0 x(t) + b_1 x'(t) + \cdots + b_m x^{(m)}(t)$$

به دست می‌آید.

در این سؤال برای راحتی از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم ($s = j\omega$).

(a) $h(t) = 2e^{2t}u(t) - 2te^{-2t}u(t)$

ابتدا تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه را حساب می‌کنیم:

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{s-a}, \qquad \mathcal{L}\{te^{at}u(t)\} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

پس

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = 2\frac{1}{s-2} - 2\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{2}{s-2} - \frac{2}{(s+2)^2}.$$

کسرها را روی مخرج مشترک می‌بریم:

$$H(s) = \frac{2(s+2)^2 - 2(s-2)}{(s-2)(s+2)^2} = \frac{2(s^2+3s+6)}{(s-2)(s+2)^2}.$$

و در نهایت

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2(s^2+3s+6)}{s^3+2s^2-4s-8}.$$

بنابراین

$$(s^3+2s^2-4s-8)\,Y(s) = 2(s^2+3s+6)\,X(s).$$

با جای‌گذاری $s \to \dfrac{d}{dt}$ معادله‌ی دیفرانسیل سیستم به صورت زیر است:

$$\boxed{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\,\frac{d^2y(t)}{dt^2} - 4\,\frac{dy(t)}{dt} - 8y(t) = 2\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 6\,\frac{dx(t)}{dt} + 12\,x(t)}$$

(b) $H(j\omega) = \dfrac{2 + 3j\omega - 3(j\omega)^2}{1 + 2j\omega}$

ابتدا $s = j\omega$ می‌گذاریم:

$$H(s) = \frac{2+3s-3s^2}{1+2s} = \frac{-3s^2+3s+2}{1+2s} = \frac{Y(s)}{X(s)}.$$

پس

$$(1+2s)\,Y(s) = (-3s^2+3s+2)\,X(s).$$

در حوزه‌ی زمان (با $s \to \frac{d}{dt}$):

$$\boxed{y(t) + 2\,\frac{dy(t)}{dt} = -3\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\,\frac{dx(t)}{dt} + 2\,x(t)}$$

مراجع